Unidad 6

Integración

Métodos Numéricos – 1er Cuatrimestre de 2020

1

Integración - Cuadratura

Métodos numéricos para estimar el valor de una integral definida:

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

donde el intervalo de integración $[a, b]$ es **finito** y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es **continua** en $[a, b]$.

Según el teorema **Fundamental del Cálculo**, para una función f con las características indicadas, existe una antiderivada (o primitiva) F de f en $[a, b]$, es decir, F es una función analítica tal que:

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in [a, b]$$

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

2

Métodos analíticos

El problema al usar los métodos analíticos de integración es que, es posible que F no se pueda expresar en términos de funciones elementales, o aunque F se conozca explícitamente, ésta no se pueda evaluar fácilmente. En otros casos se desconoce la función f y solo se tiene una tabla de puntos.

Ejemplos de tales integrales son:

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^3}dx \qquad \int_0^1 \frac{1}{1+x^5}dx \qquad \int_1^2 \frac{e^x}{x}dx \qquad \int_1^5 e^{-x^2}dx$$

Algunos de los métodos de integración numérica se basan en la aproximación de la función f mediante polinomios interpolantes.

3

Fórmulas cerradas de Newton-Cotes

Las **Fórmulas de Newton-Cotes** son un grupo de fórmulas de integración numérica de tipo interpolatorio, en las cuales se evalúa la función en puntos equidistantes para así hallar un valor aproximado de la integral.
Si $a = x_0$ y $b = x_n$ se denominan fórmulas **cerradas**. En caso contrario, se denominan fórmulas **abiertas**.

Se divide el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_k, x_{k+1}], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, donde los $n+1$ puntos $x_0, x_1, \dots, x_n$ se obtienen a partir de la fórmula $x_k = a + k * h,\ k = 0,1,\dots,n,$ siendo $h = (b-a)/n$ el **tamaño de paso** $\Rightarrow x_0 = a, x_n = b, h = x_{k+1} - x_k$

Si $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)L_j(x)$ es el polinomio de interpolación de Lagrange para la función f en los nodos $x_0, x_1, \dots, x_n$ entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} f(x_j)L_j(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \int_a^b L_j(x)dx$$

si:

$$A_j = \int_a^b L_j(x)dx \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{j=0}^{n} A_j f(x)$$

4

Regla de los Trapecios

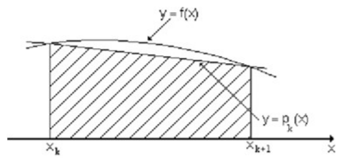
La función f se aproxima en cada subintervalo $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,1,\dots,n-1$, mediante un polinomio de interpolación lineal de Lagrange $p_k(x)$, usando los nodos x_k y x_{k+1}.

El polinomio de interpolación de Lagrange es:

$$p_k(x) = f(x_k)\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + f(x_{k+1})\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}$$

Entonces:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \int_{x_k}^{x_{k+1}} p_k(x)dx$$



5

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} p_k(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \left[f(x_k)\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}} + f(x_{k+1})\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}\right]dx$$

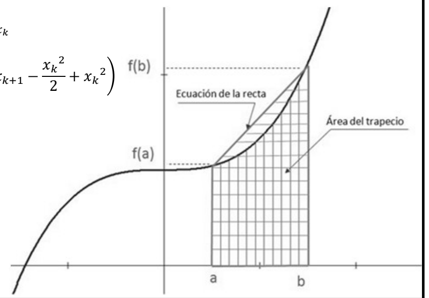
$$= \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_{k+1})\,dx + \frac{f(x_{k+1})}{x_{k+1} - x_k}\int_{x_k}^{x_{k+1}} (x - x_k)dx$$

$$= \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}\left(\frac{x^2}{2} - x_{k+1}\,x\right)\Bigg]_{x_k}^{x_{k+1}} + \frac{f(x_{k+1})}{x_{k+1} - x_k}\left(\frac{x^2}{2} - x_k\,x\right)\Bigg]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$= \frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}\left(\frac{{x_{k+1}}^2}{2} - {x_{k+1}}^2 - \frac{{x_k}^2}{2} + x_{k+1}\,x_k\right) + \frac{f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}\left(\frac{{x_{k+1}}^2}{2} - x_k\,x_{k+1} - \frac{{x_k}^2}{2} + {x_k}^2\right)$$

$$= -\frac{f(x_k)}{x_k - x_{k+1}}\frac{(x_k - x_{k+1})^2}{2} + \frac{f(x_k)}{x_{k+1} - x_k}\frac{(x_{k+1} - x_k)^2}{2}$$

$$\underbrace{= \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{\text{ancho } h}\ \underbrace{\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}}_{\text{altura promedio}}}_{\text{Fórmula de la superficie de un trapecio}}$$



6

Si $h = x_{k+1} - x_k$:

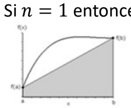
$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \frac{h[f(x_k) + f(x_{k+1})]}{2}$$

Si h es un subintervalo de $[a, b]$:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{h[f(x_k) + f(x_{k+1})]}{2}$$

Para $n = cantidad\ de\ subintervalos$:

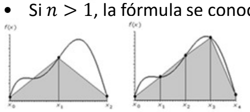
- Si $n = 1$ entonces $h = b - a$. Lo fórmula se reduce a:



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b - a}{2}[f(a) + f(b)] \Longrightarrow$$

Esta fórmula se conoce como **regla simple de los trapecios**.

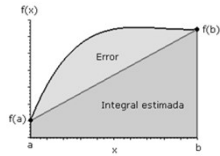
- Si $n > 1$, la fórmula se conoce como **regla compuesta de los trapecios**:



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right]$$

7

Error local en la regla de los trapecios



El error local (en 1 trapecio) al aproximar $f(x)$ mediante $p_k(x)$ es:

$$E(x) = f(x) - p_k(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{2!}f''(\xi_k(x))$$

por error de interpolación de Lagrange.

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} E(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx - \int_{x_k}^{x_{k+1}} p_k(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{2!}f''(\xi_k(x))dx$$

donde $\xi_k(x)$ es un número que depende de x y $\xi_k(x) \in (x_k, x_{k+1})$.

Si $\xi_k(x)$ tal que $f''(\xi_k(x))$ es máximo en $[x_{k+1} - x_k]$

$$E_k = \frac{1}{2}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f''(\xi_k(x))(x - x_k)(x - x_{k+1})dx = \frac{f''(\xi_k(x))}{2}\left(\frac{x^3}{3} - (x_k + x_{k+1})\frac{x^2}{2} + x_k x_{k+1} x\Bigg]_{x_k}^{x_{k+1}}\right)$$

$$= \frac{f''(\xi_k(x))}{2}\left(\frac{{x_{k+1}}^3 - {x_k}^3}{3} - (x_k + x_{k+1})\frac{{x_{k+1}}^2 - {x_k}^2}{2} + x_k x_{k+1}(x_{k+1} - x_k)\right) = -\frac{f''(\xi_k(x))}{12}(x_{k+1} - x_k)^3$$

$$= -\frac{h^3}{12}f''(\xi_k(x)) \qquad \therefore O(h^3) \quad para\ \ h = x_{k+1} - x_k$$

8

Error global en la regla de los trapecios

El error global o total que se comete al aplicar la regla compuesta de los trapecios sobre todo el intervalo $[a,b]$ es:

$$E_T=\sum_{k=0}^{n-1}E_k=\sum_{k=0}^{n-1}-\frac{h^3}{12}f''(\xi_k(x))=-\frac{h^3}{12}\sum_{k=0}^{n-1}f''(\xi_k(x))=-\frac{h^3}{12}nf''(\xi_k(x))\underset{\text{como } h=\frac{b-a}{n}}{=}-h^2\frac{b-a}{12}f''(\xi_k(x))$$

para algún $\xi_k(x)\in(a,b)$.

Si $|f''(x)|\le L$ para todo $x\in[a,b]$ entonces:

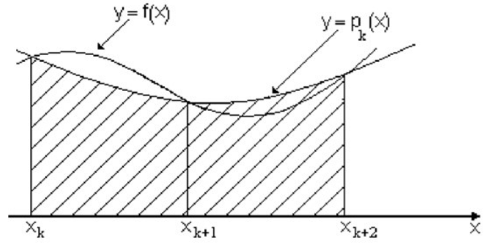
$$|E_T|=h^2\frac{b-a}{12}|f''(\xi_k(x))|\le\underbrace{h^2\frac{b-a}{12}L}_{O(h^2)}$$

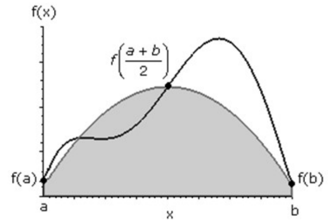
9

Regla de Simpson 1/3

Se aproxima la función f en cada subintervalo $[x_k,x_{k+2}]$, $k=0,2,\dots,n-2$, mediante un polinomio de interpolación de Lagrange de grado menor o igual que dos, usando los nodos x_k, x_{k+1} y x_{k+2}.

En este caso, el número de subintervalos n **debe ser par**.





10

El polinomio de interpolación de Lagrange de grado menor o igual que dos, usando los nodos x_k, x_{k+1} y x_{k+2} es:

$$p_k(x)=f(x_k)\frac{(x-x_{k+1})(x-x_{k+2})}{(x_k-x_{k+1})(x_k-x_{k+2})}+f(x_{k+1})\frac{(x-x_k)(x-x_{k+2})}{(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_{k+2})}+f(x_{k+2})\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k+2}-x_k)(x_{k+2}-x_{k+1})}$$

Entonces:

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}}f(x)dx$$

$$\approx\frac{f(x_k)}{(x_k-x_{k+1})(x_k-x_{k+2})}\left(\frac{x^3}{3}-(x_{k+1}+x_{k+2})\frac{x^2}{2}+x_{k+1}x_{k+2}x\right)$$

$$+\frac{f(x_{k+1})}{(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_{k+2})}\left(\frac{x^3}{3}-(x_k+x_{k+2})\frac{x^2}{2}+x_kx_{k+2}x\right)$$

$$+\frac{f(x_{k+2})}{(x_{k+2}-x_k)(x_{k+2}-x_{k+1})}\left(\frac{x^3}{3}-(x_k+x_{k+1})\frac{x^2}{2}+x_kx_{k+1}x\right)\Bigg]_{x_k}^{x_{k+2}}$$

11

Regla simple de Simpson 1/3

$$\int_{x_k}^{x_{k+2}}f(x)dx\approx\underbrace{(x_{k+2}-x_k)}_{\text{ancho}}\frac{f(x_k)+4f(x_{k+1})+f(x_{k+2})}{6}$$

$$=2h\frac{f(x_k)+4f(x_{k+1})+f(x_{k+2})}{6}=\frac{h}{3}[f(x_k)+4f(x_{k+1})+f(x_{k+2})]$$

Como $h=\frac{b-a}{2}$ entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]}$$

12

Regla compuesta de Simpson 1/3

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx \frac{h}{3}\{[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] + [f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)] + \cdots + [f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]\}$$

Entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k+1}) + 2\sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} f(x_{2k})\right]}$$

con $n = 2m$, $m \geq 2$ entero.

Error de la regla de Simpson 1/3

Error Local:

$$E_k = -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi_k) \qquad \boxed{O(h^5)}$$

Error Global:

$$E_T = \sum_{k=0,2,\dots,n-2} E_k = \sum_{k=0:2}^{n-2} -\frac{h^5}{90} f^{(iv)}(\xi_k)$$

donde $\xi_k \in (x_k, x_{k+2})$.

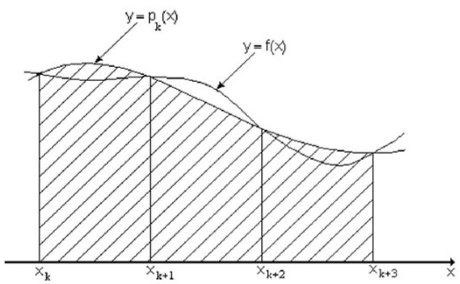
$$E_T = -\frac{h^5}{90}\sum_{k=0:2}^{n-2} f^{(iv)}(\xi) = -\frac{h^5}{90}\left(\frac{n-2}{2} + 1\right) f^{(iv)}(\xi) = -h^5 \frac{n}{180} f^{(iv)}(\xi)$$

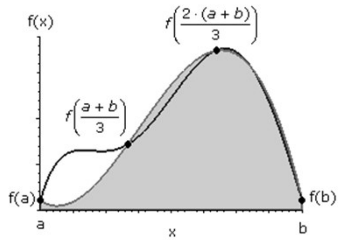
$$E_T = h^4 \frac{b-a}{180} f^{(iv)}(\xi) \qquad \boxed{O(h^4)}$$

donde $\xi \in (a, b)$.

Regla de Simpson 3/8

Se puede interpolar la función f en cada subintervalo $[x_k, x_{k+3}]$, $k = 0,3,\dots,n-3$, (lo que requiere que n sea un entero positivo múltiplo de 3) mediante un polinomio de interpolación de Lagrange de grado menor o igual que tres, usando los nodos x_k, x_{k+1}, x_{k+2} y x_{k+3}.





Regla simple de Simpson 3/8

$$\int_{x_k}^{x_{k+3}} f(x)dx \approx \underbrace{(x_{k+3} - x_k)}_{\text{ancho}} \frac{f(x_k) + 3f(x_{k+1}) + 3f(x_{k+2}) + f(x_{k+3})}{8}$$

$$= \frac{3h}{8}[f(x_k) + 3f(x_{k+1}) + 3f(x_{k+2}) + f(x_{k+3})]$$

Si $n = 3$ entonces $h = \frac{b-a}{3}$. Por lo tanto, la fórmula se reduce a:

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{3(b-a)}{24}\left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right]$$

$$= \frac{b-a}{8}\left[f(a) + 3f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + 3f\left(\frac{a+2b}{3}\right) + f(b)\right]$$

Regla compuesta de Simpson 3/8

$$I=\int_a^b f(x)dx=\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx+\int_{x_3}^{x_6} f(x)dx+\cdots+\int_{x_{n-3}}^{x_n} f(x)dx$$

$$\approx \frac{3h}{8}\{[f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)]+[f(x_3)+3f(x_4)+3f(x_5)+f(x_6)]+\cdots$$
$$+[f(x_{n-3})+3f(x_{n-2})+3f(x_{n-1})+f(x_n)]\}$$

Entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left[f(a)+f(b)+3\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{3}} f(x_{3k+1})+3\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{3}} f(x_{3k+2})+2\sum_{k=1}^{\frac{n-3}{3}} f(x_{3k})\right]}$$

con $n=3m$, $m\geq 3$ entero.

17

Error regla de Simpson 3/8

Error Local:

$$E_k=-\frac{3h^5}{80}f^{(iv)}(\xi_k),\qquad \xi_k\in(x_k,x_{k+3}),\qquad k=0,3,\ldots,n-3 \qquad \boxed{O(h^5)}$$

Error Global:

$$E_T=\sum_{k=0,3,\ldots,n-3} E_k=\sum_{k=0:3}^{n-3}-\frac{3h^5}{80}f^{(iv)}(\xi_k)$$

donde $\xi_k\in(x_k,x_{k+3})$.

$$E_T=-\frac{3h^5}{80}\sum_{k=0:3}^{n-3} f^{(iv)}(\xi)=-\frac{3h^5}{80}\left(\frac{n-3}{3}+1\right)f^{(iv)}(\xi)=-h^5\frac{n}{80}f^{(iv)}(\xi)$$

$$E_T=-h^4\frac{b-a}{80}f^{(iv)}(\xi) \qquad \boxed{O(h^4)}$$

donde $\xi\in(a,b)$.

18

Ejemplo

$$\int sen^2(x)\,dx=\frac{x}{2}-\frac{sen(x)\times cos(x)}{2}$$

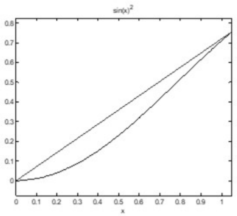
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} sen^2(x)dx=\frac{\pi}{6}-\frac{sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\times cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2}=0{,}307092424$$

Caso simple:

i) $n=1$ para trapecios.

ii) $n=2$ para Simpson 1/3.

iii) $n=3$ para Simpson 3/8.



19

Ejemplo

i) Trapecios:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} sen^2(x)dx\approx\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]=\frac{\pi}{6}\left[sen^2(0)+sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=0{,}3926991$$

Error:

$$E_T=-\frac{h^3}{12}f''(\xi),\qquad \xi\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f'(x)=2sen(x)cos(x)=sen(2x), f''(x)=2cos(2x), |f''(x)|=|2cos(2x)|\leq 2$$

$$|E_T|=\frac{h^3}{12}|f''(\xi)|\leq\frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)^3}{12}2\approx 0{,}19$$

Error real:

$$Error\ Real=|0{,}3070924-0{,}3926991|=0{,}0856\ldots\approx 0{,}1$$

20

Ejemplo

ii) Simpson 1/3:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} sen^2(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]=\frac{\pi}{18}\left[sen^2(0)+4sen^2\left(\frac{\pi}{6}\right)+sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=0{,}3054326$$

Error:

$$E_T=-\frac{h^5}{90}f^{(iv)}(\xi), \qquad \xi\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right), \qquad h=\frac{b-a}{2}=\frac{\pi}{6}$$

$$\left|f^{(iv)}(x)\right|=|-8cos(2x)|<8$$

$$|E_T|=\frac{h^5}{90}\left|f^{(iv)}(\xi)\right|\leq\frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{90}8\approx 3{,}5*10^{-3}$$

Error real:

$$Error\ Real=|0{,}3070924-0{,}3054326|=0{,}0016\approx 0{,}002$$

21

Ejemplo

iii) Simpson 3/8:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} sen^2(x)dx \approx \frac{3(b-a)}{24}\left[f(a)+3f\left(\frac{2a+b}{3}\right)+3f\left(\frac{a+2b}{3}\right)+f(b)\right]$$

$$=\frac{\pi}{24}\left[sen^2(0)+3sen^2\left(\frac{\pi}{9}\right)+3sen^2\left(\frac{2\pi}{9}\right)+sen^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=0{,}3063656$$

Error:

$$E_T=-\frac{3h^5}{80}f^{(iv)}(\xi), \qquad \xi\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right), \qquad h=\frac{b-a}{2}=\frac{\pi}{6}, \qquad \left|f^{(iv)}(x)\right|=|-8cos(2x)|<8$$

$$|E_T|=\frac{3h^5}{80}\left|f^{(iv)}(\xi)\right|\leq\frac{3\left(\frac{\pi}{6}\right)^5}{80}8\approx 1{,}6*10^{-3}$$

Error real:

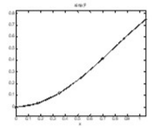
$$Error\ Real=|0{,}3070924-0{,}3063656|=0{,}0007\approx 0{,}001$$

22

Caso compuesto: $n=6$ 6 trapecios

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi}{18}$$

$$x_0=0, x_1=\frac{\pi}{18}, x_2=\frac{\pi}{9}, x_3=\frac{\pi}{6}, x_4=\frac{2\pi}{9}, x_5=\frac{5\pi}{18}, x_6=\frac{\pi}{3}$$



i) Trapecios:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} sen^2(x)dx \approx \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{5}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$$

$$=\frac{\pi}{36}\left\{f(0)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)+2\left[f\left(\frac{\pi}{18}\right)+f\left(\frac{\pi}{9}\right)+f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f\left(\frac{2\pi}{9}\right)+f\left(\frac{5\pi}{18}\right)\right]\right\}=0{,}3092953$$

Error global:

$$E_T=-\frac{h^3}{12}nf''(\xi)=-\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^3}{12}6f''(\xi)\ \Rightarrow\ |E_T|\leq\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^3}{12}\times 6\times 2\approx 5{,}3\times 10^{-3}$$

Error real:

$$Error\ Real=|0{,}3070924-0{,}3092953|=2{,}1\times 10^{-3}$$

23

Caso compuesto: $n=6$ 3 Simpson 1/3

$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi}{18}$$

$$x_0=0, x_1=\frac{\pi}{18}, x_2=\frac{\pi}{9}, x_3=\frac{\pi}{6}, x_4=\frac{2\pi}{9}, x_5=\frac{5\pi}{18}, x_6=\frac{\pi}{3}$$

ii) Simpson 1/3:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}} sen^2(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{k=0,2,4}[f(x_k)+4f(x_{k+1})+f(x_{k+2})]$$

$$=\frac{\pi}{3}\left\{f(0)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)+4\left[f\left(\frac{\pi}{18}\right)+f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f\left(\frac{5\pi}{18}\right)\right]+2\left[f\left(\frac{\pi}{9}\right)+f\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right]\right\}=0{,}3070743$$

Error global:

$$E_T=-\frac{h^5}{180}nf''(\xi)=-\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^5}{180}6f''(\xi)\ \Rightarrow\ |E_T|\leq\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^3}{30}\times 8\approx 4{,}3\times 10^{-5}$$

Error real:

$$Error\ Real=|0{,}3070924-0{,}3070743|=1{,}8\times 10^{-3}$$

24

Caso compuesto: $n = 6$ 2 Simpson 3/8

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi}{18}$$

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{18}, x_2 = \frac{\pi}{9}, x_3 = \frac{\pi}{6}, x_4 = \frac{2\pi}{9}, x_5 = \frac{5\pi}{18}, x_6 = \frac{\pi}{3}$$

ii) Simpson 1/3:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} sen^2(x)dx \approx \frac{3h}{8} \sum_{k=0,3} [f(x_k) + 3f(x_{k+1}) + 3f(x_{k+2}) + f(x_{k+3})]$$

$$= \frac{3\frac{\pi}{18}}{8}\left\{f(0) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) + 3\left[f\left(\frac{\pi}{18}\right) + f\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right] + 3\left[f\left(\frac{\pi}{9}\right) + f\left(\frac{5\pi}{18}\right)\right] + 2f\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\} = 0{,}3070510$$

Error global:

$$E_T = -\frac{h^5}{80} n f''(\xi) = -\frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^5}{80} 6 f''(\xi) \Rightarrow |E_T| \leq \frac{\left(\frac{\pi}{18}\right)^3}{80} \times 6 \times 8 \approx 9{,}7 \times 10^{-5}$$

Error real:

$$Error\ Real = |0{,}3070924 - 0{,}3070510| = 4{,}1 \times 10^{-5}$$

Integración de Romberg

Es una técnica diseñada para obtener integrales numéricas de funciones de manera más eficiente. Se basa en aplicaciones sucesivas de la regla del trapecio. Sin embargo, a través de las manipulaciones matemáticas, se alcanzan mejores resultados con menos trabajo.

El método de Romberg genera una matriz triangular cuyos elementos son estimaciones numéricas de la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ usando la **extrapolación de Richardson** de forma reiterada en la regla del trapecio.

Si se aplica la regla de los Trapecios sucesivamente para tamaños de intervalo h_k:

$h_1 = b - a$ ($m_1 = 2^0$ subintervalos)

$h_2 = \frac{h_1}{2} = \frac{b-a}{2}$ ($m_2 = 2^1$ subintervalos)

$h_3 = \frac{h_2}{2} = \frac{b-a}{2^2}$ ($m_3 = 2^2$ subintervalos)

…

$h_k = \frac{h_{k-1}}{2} = \frac{b-a}{2^{k-1}}$ ($m_k = 2^{k-1}$ subintervalos)

Requiere conocer la función o disponer de $\boldsymbol{n = m_k + 1 = (2^{k-1} + 1)}$ puntos

Fórmula recursiva de Romberg para trapecios

Regla compuesta de trapecios:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h_k}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{2^{k-1}-1} f(a + ih_k)\right] = R_{k,1}$$

Un trapecio:

$$R_{1,1} = \frac{h_1}{2}[f(a) + f(b)] = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

Dos trapecios:

$$R_{2,1} = \frac{h_2}{2}[f(a) + f(b) + 2f(a + h_2)] = \frac{b-a}{4}\left[f(a) + f(b) + 2f\left(a + \frac{b-a}{2}\right)\right]$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left\{\boxed{\frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]} + \boxed{(b-a)} f\left(a + \frac{1}{2}\boxed{(b-a)}\right)\right\} = \frac{1}{2}\left[\boxed{R_{1,1}} + \boxed{h_1} f\left(a + \frac{1}{2}\boxed{h_1}\right)\right]$$

Cuatro trapecios:

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left\{R_{2,1} + h_2\left[f\left(a + \frac{h_2}{2}\right) + f\left(a + \frac{3h_2}{2}\right)\right]\right\}$$

Fórmula recursiva de Romberg para trapecios

En general, 2^{k-1} trapecios:

$$\boxed{R_{k,1} = \frac{1}{2}\left\{R_{k-1,1} + h_{k-1}\sum_{i=1}^{2^{k-2}} f\left(a + \frac{2i-1}{2}h_{k-1}\right)\right\}}$$

Ejemplo

$$\int_1^3 \frac{1}{x}dx = \ln(3) = 1{,}09861229$$

$$R_{1,1} = \frac{3-1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3} \approx 1{,}3333$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{3} + (3-1)\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{6} \approx 1{,}166667$$

$$R_{3,1} = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{6} + \frac{3-1}{2}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{5}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6}+\frac{16}{15}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{67}{60} \approx 1{,}116667$$

Las aproximaciones $R_{k,1}$ van acercándose al valor exacto de la integral, pero lentamente.

Por medio de la ***Extrapolación de Richardson*** se puede **acelerar la convergencia**.

Extrapolación de Richardson

El método de **extrapolación de Richardson** permite construir, a partir de una secuencia convergente, otra secuencia más rápidamente convergente.

Esta técnica se usa frecuentemente para mejorar los resultados de métodos numéricos a partir de una estimación previa.

Sirve para generar resultados de gran exactitud cuando se usan fórmulas de bajo orden. Puede aplicarse siempre que se sepa que el método de aproximación tiene un término de error con una fórmula previsible.

Extrapolación de Richardson

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{T(f,h_k)}_{R_k} + E_T(f,h_k), \qquad E_T = O\left({h_k}^2\right) = C{h_k}^2 \qquad \textbf{(1)}$$

Para R_{k+1} con $h_{k+1} = \frac{h_k}{2}$:

$$\int_a^b f(x)dx = \overbrace{T(f,h_{k+1})}^{R_{k+1}} + E_T(f,h_{k+1}), \qquad E_T = O\left({h_{k+1}}^2\right) = C{h_{k+1}}^2 = C\frac{{h_k}^2}{4} \qquad \textbf{(2)}$$

Multiplicando (2) por 4 y restándole (1) se elimina un término de error:

$$4\left(R_{k+1} + C\frac{{h_k}^2}{4}\right) - \left(R_k + C{h_k}^2\right) = 4\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = 3\int_a^b f(x)dx = 4R_{k+1} - R_k$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{4R_{k,1} - R_{k-1,1}}{3}$$

En general:

$$\boxed{R_{i,j} = \frac{4^{j-1}R_{i,j-1} - R_{i-1,j-1}}{4^{j-1}-1}} \Longrightarrow$$

Para cada $i = 1,2,\dots,n$ y $j = 2,\dots,i$ con error asociado $O\left(h_j^{2j}\right)$

$$\begin{array}{ccccccccc}
R_{1,1} & & & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & & & \\
R_{2,1} & \rightarrow & R_{2,2} & & & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & & & & & \\
R_{3,1} & \rightarrow & R_{3,2} & \rightarrow & R_{3,3} & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
\vdots & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & \cdots & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
R_{n,1} & \rightarrow & R_{n,2} & \rightarrow & R_{n,3} & \rightarrow & \cdots & \rightarrow & R_{n,n}
\end{array} \Longrightarrow$$

El resultado mejora en el sentido de las flechas. **Los $R_{i,1}$ coinciden con los resultados de i trapecios, o de 2^{k-1} trapecios VER!!!!!** los $R_{i,2}$ coinciden con los resultados de Simpson 1/3, los $R_{i,3}$ coinciden con los resultados de Boole (integración a partir de 4 puntos).

$$R_{2,2} = \frac{4R_{2,1} - R_{1,1}}{3} = \frac{4\frac{7}{6} - \frac{4}{3}}{3} = \frac{10}{9} \approx 1{,}11111$$

$$R_{3,2} = \frac{4R_{3,1} - R_{2,1}}{3} = \frac{4\frac{67}{60} - \frac{7}{6}}{3} = \frac{198}{180} \approx 1{,}1$$

$$R_{3,3} = \frac{4^{3-1}R_{3,2} - R_{2,2}}{4^{3-1}-1} = \frac{16\frac{198}{180} - \frac{10}{9}}{15} = \frac{1484}{1350} \approx 1{,}099259$$

El procedimiento termina cuando, dada una tolerancia $\varepsilon > 0$, se satisface:
$\left|R_{k,k-1} - R_{k,k}\right| < \varepsilon$

Integración adaptativa

- Las reglas compuestas de cuadratura necesitan nodos equiespaciados.
- Generalmente, se usa un incremento pequeño h de manera uniforme en todo el intervalo de integración para garantizar una precisión global.
- Este proceso no tienen en cuenta el hecho de que en algunas porciones de la curva puedan aparecer oscilaciones más pronunciadas que en otras y, en consecuencia, requieran incrementos más pequeños para conseguir la misma precisión.
- Sería interesante disponer de un método que vaya ajustando el incremento de manera que sea menor en aquellas porciones de la curva en la que aparezcan oscilaciones más pronunciadas.
- El método se basa en la regla de Simpson y se llama **integración adaptativa**.

Integración adaptativa

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{S(f,h_k)}_{R_k} + E_T(f,h_k), \qquad E_T = O\left({h_k}^4\right) = C{h_k}^4 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{S(f,h_{k+1})}_{R_{k+1}} + E_T(f,h_{k+1}), \qquad E_T = O\left({h_{k+1}}^4\right) = C{h_{k+1}}^4 = C\frac{{h_k}^4}{16} \quad pues\colon h_{k+1} = \frac{h_k}{2} \qquad \textbf{(2)}$$

Multiplicando (2) por 16 y restándole (1) se elimina un término del error:

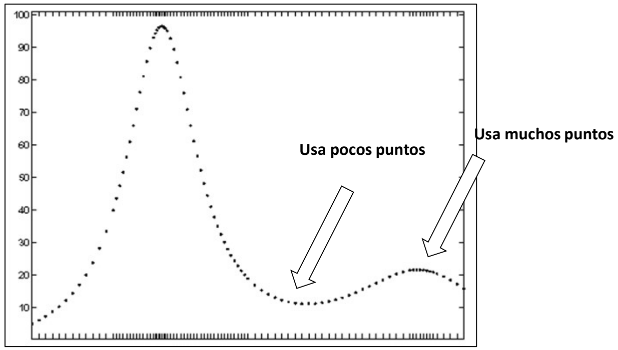
$$16\left(R_{k+1} + C\frac{{h_k}^4}{16}\right) - \left(R_k + C{h_k}^4\right) = 16\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x)dx = 15\int_a^b f(x)dx = 16R_{k+1} - R_k$$

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{16R_{k,1} - R_{k-1,1}}{15}$$

Se aplica el ajuste sólo en los intervalos donde **no se obtiene** la aproximación requerida.

Gráfico generado por integración adaptativa

quad('humps',0,1,1.e-4,1)



Comandos Matlab

T = trapz(y):

Calcula la integral por la regla de los trapecios, **y** es un vector y **T** es la integral con un intervalo unitario, por lo tanto el resultado final será **T*h**.

T = cumtrapz(y):

Igual que **trapz**, pero devuelve los valores acumulados de los trapecios, **T=[**t_1**,**t_1+t_2**,** $t_1+t_2+t_3$**, ...]**.

Q = quad('F',a,b,tol,graf):

Calcula la integral de **'F'** entre **a** y **b** por integración adaptativa, **F** debe estar definida como función y la expresión debe utilizar operadores vectoriales (.*, .^, . /), si **graf** es distinto de 0 grafica los puntos que va utilizando para aproximar la integral.